望ましい数学の大学入試問題について
「別解」

名古屋瀬戸地区数学研究会研究部Ｂグループ
高原文規*

2003 年 8 月 5 日

概 要

名古屋瀬戸地区数学研究会研究部Ｂグループでは高等学校における数学の授業・生徒の学習態度や学習方針の改善のため, 大学入学試験に「別解」を問う形式での出題をすることを提案する.

本稿では, 別解を考えることの有効性・大学入試に出題された場合に予測される生徒の学習への影響・別解の採点に対する指針について述べる.

キーワード　大学入試　別解　オープンエンド　分野の関連

1　はじめに

近年, 高校生の「理系離れ」「数学離れ」が問題視され, いかにして食い止めるかが議論されている.

高校の数学教師である私たち名古屋瀬戸地区数学研究会研究部Ｂグループ (以下Ｂグループ) もこれに関心を寄せ, 授業の改善などの対策を考えていた.

1 つは, 基本的な「定義、定理・公式の証明」をきちんと学習させること.

1 つは, 別解を考える習慣をつけさせることである.

しかし, 我々の勤務校では大学へ進学する生徒が多数を占め, 大学入試を無視した授業内容・授業方法の改善は現実的な力と広がりを持たない.

そのため, Ｂグループでは, 大学入試の数学の問題に対して, 次の 3 つの提言を考えた.

1 つは数学を学び・大学受験に利用する層の底辺拡大のため, センター試験は資格試験でかまわないというぐらいの割り切りをもって易化する.
この提言については, 今大会での発表はできなかった.

1 つは基本的な「定義、定理・公式の証明」を問う出題をすることによって, 基礎・基本に生徒の目を向けさせ, その大切さと, 良さを実感する授業の展開につなげること.
この提言については, 後ほど山田満貴先生[1]より, 発表される.

最後に, 本発表の主張である, 「別解」を問う出題をすることによって, 自分の獲得した知識をすべて総合して考える習慣をつける指導につなげること.

本発表は,「別解」を考えることの意義, 「別解」を大学入試で問うことの意義について考察し, 大学入試で出題する際の問題点の解消の一助になることを目的とする.

2　「別解」を考えることの意義

本発表に当たって, 先行研究を探したが,「別解」について包括的な研究をしたものや, その出題の可能性について触れたものは残念ながら発見できなかった.

数学教師なら誰もが気づいていることではあるが, 文書化がなされていない問題であると思い, ここに私見ではあるが, 「別解」を考えることの意義についてまとめる.

2.1　数学のおもしろさ

数学などの学問のおもしろさに, 与えられた問題の解法をひらめいた時の感激があることは数学の教師なら誰もが認めることであろう.
暗記を重視し,「自ら考えた末, ひらめく」という体験が薄ければ, 感激も少なく, 理数離れの一因になっていると考える.

---

*愛知県立天白高等学校教諭
[1]愛知県立東郷高等学校教諭

数学の教師としては, 出題して終わりではなく, その問題の解法を提示, 解説する義務があるがこの一通りの解法だけでは解法の妙を受け取ることができる生徒以外の感激を呼ぶことはできない.

ここに,「別解」の存在の示唆を加えることによって, 生徒に自分で解法をひらめいた時の感激を与えることができるものと期待できる.

2.2　オープンエンド

オープンエンドの問題とは, 正答がいくとおりにも可能になるように条件付けられた問題である.
との定義[2] があるが, 正答にいたる道筋をいくとおりも考える「別解」もオープンエンドの学習と解釈することができる.

2.1 での考察は, オープンエンド学習の意義と一致しているように思われる.

2.3　一つの問題を色々な角度から見る訓練になる

4.2 に詳しく述べるが, 「別解」を発見するのに一番良い方法は, 与えられた問題の解釈を色々な分野の道具を使ってしてみることである.

この訓練によって, 一つの問題を多面的に考察する習慣がつくことが期待できる.

2.4　いくつかの分野の関連を実感する

2.3 の考察と裏腹の関係になるが, 同じ問題に対して, 色々な分野で解釈するということは, 一通り学習しただけの場合に比べて, 解釈に使った分野同士の関連を把握することである.

これによって, 数学の全体に対する表象が生まれることが期待できる.

2.5　図形に対する学習量が増える

高校では，初等幾何，三角関数による図形の計量, 解析幾何，ベクトルと道具が揃っているため,「別解」を考える訓練の最初は図形の問題に対してなされることが適当であり, また事実そうなるものと期待できる.

図形の問題で「別解」を作ることを考えて学習すると，自然に図形に対する学習量が増え，まず図をかいてその解釈をする習慣が身につくと期待できる.

名古屋瀬戸地区数学研究会研究部では, 図形分野の訓練をすることによって生徒の学力向上に良い影響を与えるという研究結果[3]があり, その結果を踏まえても好ましい.

2.6　各分野の得意・不得意に気付く

「別解」の学習によって，式は与えられた問題の記述であり，問題の解釈のしかたによって記述が変わることを理解すると期待できる.

ある分野（記述形式，たとえば解析幾何）の得意なこと（図形の平行移動など）不得意なこと（与えられたいくつかの点を通る 2 円の交点の座標を求めるなど）に気付くきっかけになると期待できる.

2.7　生徒にとって得意な分野が生まれる

別解の学習を続けるうちに, その問題にもっともふさわしい解法の他に, 自分の得意な分野の問題として解くようになることが期待できる.

その結果, 生徒自身の得意な分野ができ, それを意識することが期待できる.

3　「別解」を大学入試で問うことの意義

3.1　学習の動機付け

2 で見たように, 「別解」を生徒が学習することには好ましい面がいくつも存在する.

しかし, 授業の工夫のレベルによる改善は,

(1) 一つの問題に対する指導時間の増加
$\iff$ 単位時間内に指導できる問題数の減少

(2) 「別解」学習に対する生徒の意欲の引き出し方が難しい.

などの問題点がある.

大学へ進学する生徒にとって, 「大学入試で出題される」ことは, これらの問題点を克服し, 「別解」について学習する動機となる.

3.2　丸暗記の学習がしにくい

私が教えている生徒は, 大学への進学を希望しているが, 解答を「丸暗記」してしまおうという段階の生徒も多い.

---
[2]島田茂（編著）「算数・数学科のオープンエンドアプローチ」,1977
[3]第八委員会,1988,1989,1990

解答の「丸暗記」でも, 現状の出題では適度に得点できるので, 生徒はこの方式のまずさ, 問題点を認識できない.

しかし, 2.1 で述べたように, ひらめく体験を生徒にしてほしいと考える私にとって, 丸暗記の学習法は, 感激を生まない, まずい方法である.

「別解」を問う出題がなされれば, 暗記を重視する受験勉強では覚える量が２倍となり対応しにくくなる.

3.3 分野の関連に気付く

たとえ生徒が解答を２通り丸暗記する学習をしたとしても，同じ問題を違うやり方（違う分野）で解く解答に触れることによって，生徒の中の数学のイメージが分野ごとにバラバラのまま終わるのではなく，関連づけられる.

3.4 考えさせる問題を授業で学習した分野から出題できる

現在，試験時間中に生徒自身に考えさせることを目的とすると，生徒が見たことがないような難しいレベルの問題か, 簡単だが教科書では整理されていない整数論の分野などを出題するしかない.

2.5 で触れたように，「別解」を問う出題では図形分野の方が出題されやすいと考える.

そして, 図形分野で, 教科書の例題と同じ問題を出題したとしても，「別解」を解答するときには, 生徒が自分で考えなくてはならない.

すなわち, 考えさせる問題を授業で学習した分野から出題されることが期待できる.

4 採点についての問題

4.1 問題点の指摘

3 で見たように,「別解」が大学入試で出題され，生徒が「別解」を学習することには意義があるが，解答 S と解答 S' が別解であるかどうかの判定が確立されていない.

この判定のガイドラインを提示しない限り，本研究の主張に賛同していただいたとしても，大学側は「別解」を問う問題を出題しにくい.

そのため，本研究では，もう１歩踏み込み,「高校教師が考える別解」とはどのように違っている解答であるかを調査する.

4.2 「別解」のパターンの分析

今まで無定義語としてきたが
問題の解答にいたる道筋に違う論述を用いた二つ以上の解答は互いに他の「別解」である.
と定義する.
違う論述とはどのようなものを指すかが, 問題となってくる.

我々Ｂグループでは,「教科書の違う章の解法は別解である」[4]という解釈で一致した.

しかし,「図形と方程式」章の中にも円と直線が接するという状態を連立方程式が重解を持つと解釈するか, 円の中心から直線までの距離が円の半径と等しいと解釈するかで「別解」となるのではないかと思える場合がある.

この場合について, 調査する必要がある.

4.3 「別解」の量

現在の問題の解答は, 多かれ少なかれ, 各分野の融合となる. 解答 S と解答 S' の一部分だけが違っている場合「別解」と解釈すべきであるか否かについて, 調査する必要がある.

4.4 配点について

「別解」を問う出題をした場合, どのような配点をするべきか, 調査する必要がある.

4.5 アンケート結果より

以上を踏まえて,
別解候補を作成し，それを別解と判定するかどうか,
配点についてはどのように考えるか,
のアンケートを実施した.

対象は, 名古屋瀬戸地区を中心とした, 愛知県内の高等学校の数学を担当する教諭.
有効回答数は 35 であった.
100 人は集めたかったが, 時間的な制約等から無理であった.

[4]パッポスの中線定理に対する「三角比」「図形と方程式」「ベクトル」による証明

以下はその項目と結果である.

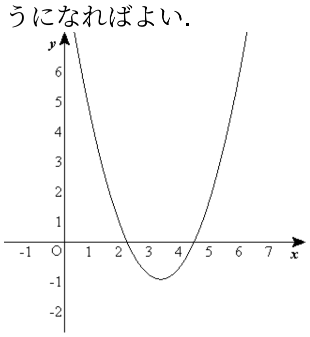
項目 1. 次の 2 つの問題の解答は別解と思いますか.

(1) x についての 2 次方程式, $x^2+ax+9=0$ の 2 つの解 α,β が共に 1 より大きいとき, a の範囲を求めよ.

(解答)

α,β は 2 次関数 $y=x^2+ax+9$ のグラフと x 軸の交点の x 座標になる.

題意を満たすには, 2 次関数のグラフが下図のようになればよい.



よって,

2 次方程式の判別式 $a^2-36 \geqq 0$

グラフの軸 $-\dfrac{a}{2}>1$

$x=1$ のとき, $y=a+10>0$

これらを解いて, $-10<a \leqq -6$

(2) (1) を別の方法で求めよ.

(解答)

α,β は 共に実数だから,

2 次方程式の判別式 $a^2-36 \geqq 0$ $\cdots$①

また, $\alpha>1, \beta>1$ だから,

$\alpha+\beta>2$

$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1>0$

これは, 解と係数の関係より,

$-a>2$ $\cdots$②

$9-(-a)+1>0$ $\cdots$③

①, ②, ③ より, $-10<a \leqq -6$

項目 2. 次の 2 つの問題の解答は別解と思いますか.

(1) 2 次関数 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+50$ のグラフと x 軸で囲まれた領域に内接する長方形を考える. ただし, 長方形の一辺は必ず x 軸上にあるとする. この長方形の周囲の長さが最大となるときの, 長方形の高さ (x 軸上に垂直な辺の長さ) を求めなさい.

(解答)

$y=-\dfrac{1}{2}x^2+50>0$ のとき, $-10<x<10$ だから, $0<t<10$ として, 長方形の 4 頂点の座標は,

$(t,0), \left(t,-\dfrac{1}{2}t^2+50\right), \left(-t,-\dfrac{1}{2}t^2+50\right), (-t,0)$

と書ける. このとき, 長方形の周囲の長さ ℓ は,

$$\ell = 2\times(2t)+2\times\left(-\frac{1}{2}t^2+50\right)$$
$$= -t^2+4t+100 = -(t-2)^2+104$$

したがって, $t=2$ のとき, ℓ は最大.

このときの長方形の高さは, $-\dfrac{1}{2}t^2+50=48$

(2) (1) を別の方法で求めなさい.

(解答)

$y=-\dfrac{1}{2}x^2+50>0$ のとき, $-10<x<10$ だから, $0<t<10$ として, 長方形の 4 頂点の座標は,

$(t,0), \left(t,-\dfrac{1}{2}t^2+50\right), \left(-t,-\dfrac{1}{2}t^2+50\right), (-t,0)$

と書ける. このとき, 長方形の周囲の長さ ℓ は,

$$\ell = 2\times(2t)+2\times\left(-\frac{1}{2}t^2+50\right)$$
$$= -t^2+4t+100$$

$\dfrac{d\ell}{dt}=-2t+4=-2(t-2)$ だから,

ℓ の増減表は以下のようになる.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

したがって, $t=2$ のとき, ℓ は最大.

このときの長方形の高さは, $-\dfrac{1}{2}t^2+50=48$

項目 3. 次の２つの問題の解答は別解と思いますか.

(1) 次の漸化式を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$$a_1 = 4,\ a_{n+1} = 2a_n - 1$$

(解答)

$a_{n+1} = 2a_n - 1$ $\cdots$①

は任意の自然数 n について成り立つから,

$a_{n+2} = 2a_{n+1} - 1$ $\cdots$②

② − ①

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$$

すなわち, $\{a_n\}$ の階差数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ は,

公比 2 の等比数列.

$a_2 = 2a_1 - 1 = 7$ より,

階差数列の初項 $a_2 - a_1 = 3$ だから,

$$a_{n+1} - a_n = 3 \times 2^{n-1}$$

よって,

$n \geqq 2$ のとき,

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} 3 \times 2^{k-1}$$

$$= 4 + \frac{3(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 3 \times 2^{n-1} + 1$$

$n = 1$ のときも,

$3 \times 2^{1-1} + 1 = 4 = a_1$ となり成り立つ.

したがって,

$$a_n = 3 \times 2^{n-1} + 1$$

(2) (1) を別の方法で求めよ.

(解答)

$a_{n+1} = 2a_n - 1$ $\cdots$①

は任意の自然数 n について成り立つから,

$a_{n+2} = 2a_{n+1} - 1$ $\cdots$②

② − ①

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$$

すなわち, $\{a_{n+1} - a_n\}$ は, 公比 2 の等比数列.

$a_2 = 2a_1 - 1 = 7$ より, 初項 $a_2 - a_1 = 3$ だから,

$$a_{n+1} - a_n = 3 \times 2^{n-1}$$

① を代入して,

$$(2a_n - 1) - a_n = 3 \times 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 3 \times 2^{n-1} + 1$$

項目 1. 2. 3. は解答の一部分が違っているとき, どのように判定されるかを問う意図で出題した. 結果は以下の通りである.

	別解である	どちらかといえば別解である	別解かどうかわからない	別解ではない
項目 1.	31	4	0	0
項目 2.	7	7	7	14
項目 3.	15	10	4	6

項目 1. は, 解答の初めの問題解釈の部分で別分野 (2 次関数, 解と係数の関係) を使ったものであり, ほとんどの回答者が別解であると認識している.

項目 2. では, 問題の最初の解釈を同じにし, 最大となる状態を求める部分のみ, 別分野 (2 次関数, 微分) を使ったものであるが, この解答を別解と認識されない回答者が多かった.

項目 3. では, 解答の終盤で, 同じ分野 (階差数列, 隣接 3 項間) を使ったが, 迷いながらも別解と考える回答者が多かった.

以上から, 少なくとも

最初の解釈部分で違う分野を使った解釈をしている 2 つの解答は互いに「別解」である.

ということが言えるが, 他については, さらに詳しい分析を必要とする.

項目 4. 次の 2 つの問題の解答は別解と思いますか.

(1) 中心 $C(5,3)$, 半径 5 の円と直線 $y = 2x + 3$ の 2 交点を P, Q とする．3 点 C, P, Q を通る円の方程式を求めよ.

(解答)

与えられた円の方程式が $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 25$ だから,

直線の方程式を代入して、

$5x^2 - 10x = 0$

$\therefore x = 0, 2$

よって,$P(0,3), Q(2,7)$ としてよい.

求める円の方程式を $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ とすると, P, Q, C を通るから,

$$\begin{cases} 9 + 3m + n = 0 \\ 53 + 2l + 7m + n = 0 \\ 34 + 5l + 3m + n = 0 \end{cases}$$

これを解いて,

$l = -5, m = -\dfrac{17}{2}, n = \dfrac{33}{2}$

よって, 求める方程式は,

$x^2 + y^2 - 5x - \dfrac{17}{2}y + \dfrac{33}{2} = 0$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{17}{4}\right)^2 = \frac{125}{16}$$

(2) (1) を別の方法で求めよ.

(解答)

与えられた円の方程式が $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 25$ だから,

与えられた円と直線の交点 P, Q を通る円の方程式は一般に,

$\{(x-5)^2 + (y-3)^2 - 25\} + k(2x + 3 - y) = 0$

と表される.

これが $C(5,3)$ を通るとき, $-25 + 10k = 0$

$\therefore k = \dfrac{5}{2}$

よって, 求める方程式は,

$\{(x-5)^2 + (y-3)^2 - 25\} + \dfrac{5}{2}(2x + 3 - y) = 0$

$x^2 + y^2 - 5x - \dfrac{17}{2}y + \dfrac{33}{2} = 0$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{17}{4}\right)^2 = \frac{125}{16}$$

項目 5. 次の 2 つの問題の解答は別解と思いますか.

(1) 赤玉 3 個, 白玉 5 個の入った袋がある．この中から順に 3 個の玉を取り出したとき, 赤玉が 1 個, 白玉が 2 個である確率を求めよ.

ただし, 取り出した玉は, 袋に戻さない.

(解答)

取り出した玉がすべて区別できるとしても, 確率は変わらない.

このとき, 3 個の玉の出かたは全部で, ${}_8P_3$ 通り.

3 個の赤玉の中からどの 1 個が出るか ${}_3P_1$ 通り.

5 個の白玉の中からどの 2 個が順に出るか ${}_5P_2$ 通り.

3 回取り出すうちのどの 1 回に赤玉が出るか ${}_3C_1$ 通り.

よって, 赤玉が 1 個, 白玉が 2 個 出る出かたは, 出る順番を考えると,

${}_3C_1 \cdot {}_3P_1 \cdot {}_5P_2$

よって, 求める確率は,

$\dfrac{{}_3C_1 \cdot {}_3P_1 \cdot {}_5P_2}{{}_8P_3} = \dfrac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4}{8 \cdot 7 \cdot 6} = \dfrac{15}{28}$

(2) (1) を別の方法で求めよ.

(解答)

3 個の玉を同時に取り出し, 取り出した玉がすべて区別できるとしても, 確率は変わらない.

このとき, 3 個の玉の出かたは全部で, ${}_8C_3$ 通り.

3 個の赤玉の中からどの 1 個が出るか ${}_3C_1$ 通り.

5 個の白玉の中からどの 2 個が出るか ${}_5C_2$ 通り.

よって, 赤玉が 1 個, 白玉が 2 個 出る出かたは,

${}_3C_1 \cdot {}_5C_2$

よって, 求める確率は,

$\dfrac{{}_3C_1 \cdot {}_5C_2}{{}_8C_3} = \dfrac{3 \cdot 10}{56} = \dfrac{15}{28}$

項目 4. 5. は同じ章の内容を使った解答であるとき, どのように判定されるかを問う意図で出題した. 結果は以下の通りである.

	別解である	どちらかといえば別解である	別解かどうかわからない	別解ではない
項目 4.	29	3	2	1
項目 5.	11	16	3	5

項目 4. は, 普段から別解と認識されるであろうものを選んだが, ほとんどの回答者が別解であると認識している.

項目 5. では, 根元事象を変更し順列を組み合わせに変えたが, ここでも, かなりのの回答者はやや迷いながらも別解であると認識している.

上記 2 つは, 問題集などにも別解として紹介される場面が多い解答であり, その点で, 項目 5. の解答の別解としての認識率が比較的低いことは, さらに詳しい分析を必要とする.

項目 6. 別解に関するあなたのお考えは次のうちのどれに近いですか.
ア 2 つの解答の一部でも違えば別解と見なす.
イ 2 つの解答は全部違わないと別解とは見なさない.
ウ 2 つの解答の一部が違うとき, その内容によって, 別解であるかどうかを判断する.

ア	イ	ウ
4	3	28

別解であるかどうかは, その内容次第であることがうかがえ, 項目 1. 2. 3. とも整合する.

項目 7. 別解に関するあなたのお考えは次のうちのどれに近いですか.
ア 2 つの解答の分野が違えば別解と見なす.
イ 2 つの解答の考え方が同じならたとえ分野が違っても別解とは見なさない.
ウ 2 つの解答の考え方が違えば分野が同じでも別解と見なす.

ア	イ	ウ
8	5	22

分野が同じ, 違うということより, 考え方が同じ, 違うということの方が, 別解であるかどうかを判断する根拠になると考える回答者が多かった.

項目 4. 5. の結果と照らし合わせると, 項目 4. については考え方が違うと判断した回答者が多く, 項目 5. については考え方が違うとは言い切れないと迷う回答者が多かったと解釈できる.

項目 8. 配点に関する質問にお答えください.

(1) 項目 1 ～ 5 のような形式で出題し, (1) と (2) を合わせて 100 点の配点のとき, どのように配点すればよいとお考えですか.
ア (1),(2) それぞれ 50 点
イ (1)(2) に合わせて 100 点より少なく配点して, 別解の度合いについて配点する.

(2) (1) で ア と答えた方のみお答えください.
2 つの解答が一部だけ違うとき,
ア 別解と見なさず, 1 問分だけの点数とする
イ 別解と見なし, 2 問分の点数とする
ウ 違う一部の部分の配点を加算する

(3) (1) でイと答えた方のみお答えください.
次のうちのどれが適当だと思いますか.
ア (1) に 45 点 (2) に 45 点 別解度 10 点
イ (1) に 40 点 (2) に 40 点 別解度 20 点
ウ (1) に 35 点 (2) に 35 点 別解度 30 点
エ (1) に 50 点 (2) に 30 点 別解度 20 点
オ (1) に 30 点 (2) に 50 点 別解度 20 点
カ (1) に 50 点 (2) に 0 点 別解度 50 点

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
ア	2	6	14			
イ	1	6	1	1	0	4

アンケートを作成した段階では イ-エ, イーカ の解答が多いのではないかと予想していたが, これに反して, ア-ウが多かった.

この結果によると, 解答のすべてが違っていないと満点は取れないことになるが, そのようなことが可能な問題は限られるのではないだろうか. さらに研究する必要を感じた.

5　まとめ

数学の学習方法として,「別解」を考えることが有効であることは，昔から言われている．本研究は, この点について考察し, その意義を再確認するとともに, 生徒に対し「別解」を意識した学習をさせる動機付けとして大学入試に「別解」を問う問題の出題を提言し, 出題に当たっての採点の指針を作ることを目的とした.

まだ, 研究の端緒についたばかりであるが, いつか, 大学入試問題に「別解」を問う問題が出題されることを目標として, 続けていきたい.

しかし, アンケートを通して,
「我々教師から見てつまらない解答であっても, それを思いついた生徒にとってはすばらしい別解であり, それに点数 (優劣) をつけることによって, 生徒の別解を考える意欲をつぶすことになりはしないか.」
と危惧するご意見もいただいた．この点について, 考慮していくことも忘れてはならないだろう.

なお, 大学の先生方にお目にかけることも目的として, 本稿はインターネット上に公開する.
ネット上でアンケートの続きも実施する予定なので, ご協力いただくようお願いする.